Informatik II für Verkehrsingenieure
Edit-Distanz

Janis Voigtländer

Technische Universität Dresden

Sommersemester 2007

Überblick

Problemstellung

Formalisierung

Effiziente Berechnung

Retracing

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];
  do
    { while (a[i]<x) i++;
      while (a[j]>x) j--;
      ...
```

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];
  do
    { while (a[i]<x) i++;
      while (a[j]>x) j--;
      ...
```

```
void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R;
  k=(L+R)/2; x=a[k];
  do
    { while (a[i]<x) i++;
      while (a[j]<x) j--;
      ...
```

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)                  | void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;                        | { int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];          |   i=L; j=R;
  do                                    |   k=(L+R)/2; x=a[k];
    { while (a[i]<x) i++;               |   do
      while (a[j]>x) j--;               |     { while (a[i]<x) i++;
      ...                               |       while (a[j]<x) j--;
                                        |       ...
```

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)                 | void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;                       | { int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];         |   i=L; j=R;
  do                                   |   k=(L+R)/2; x=a[k];
    { while (a[i]<x) i++;              |   do
      while (a[j]>x) j--;              |     { while (a[i]<x) i++;
      ...                              |       while (a[j]<x) j--;
                                       |       ...
```

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)                  | void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;                        | { int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];          |   i=L; j=R;
  do                                    |   k=(L+R)/2; x=a[k];
    { while (a[i]<x) i++;               |   do
      while (a[j]>x) j--;               |     { while (a[i]<x) i++;
      ...                               |       while (a[j]<x) j--;
                                        |       ...
```

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)                  | void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;                        | { int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];          |   i=L; j=R;
  do                                    |   k=(L+R)/2; x=a[k];
    { while (a[i]<x) i++;               |   do
      while (a[j]>x) j--;               |     { while (a[i]<x) i++;
      ...                               |       while (a[j]<x) j--;
                                        |       ...
```

Problem: Ab der dritten Zeile würden die Dateien als komplett verschieden interpretiert!

Dateivergleich

```
void sort(int L,int R)                 | void sort(int L,int R)
{ int i,j,w,x,k;                       | { int i,j,w,x,k;
  i=L; j=R; k=(L+R)/2; x=a[k];         |   i=L; j=R;
  do                                   |   k=(L+R)/2; x=a[k];
    { while (a[i]<x) i++;              |   do
      while (a[j]>x) j--;              |     { while (a[i]<x) i++;
      ...                              |       while (a[j]<x) j--;
                                       |       ...
```

Problem: Ab der dritten Zeile würden die Dateien als komplett verschieden interpretiert!

Ziel: intelligenterer Vergleich

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens
- Anzahl solcher Operationen als Vergleichsmaß

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens
- Anzahl solcher Operationen als Vergleichsmaß

Beispiel: Eingabe „abcbcba“ und „acbda“

$\rightsquigarrow$ mögliche Erklärungen des Unterschieds:

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens
- Anzahl solcher Operationen als Vergleichsmaß

Beispiel: Eingabe „abcbcba“ und „acbda“

$\rightsquigarrow$ mögliche Erklärungen des Unterschieds:

a	b	c	b	c	b	a
a	c	b	d	a	–	–

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens
- Anzahl solcher Operationen als Vergleichsmaß

Beispiel: Eingabe „abcbcba“ und „acbda“

$\rightsquigarrow$ mögliche Erklärungen des Unterschieds:

a	b	c	b	c	b	a
a	c	b	d	a	–	–

a	b	c	b	c	b	–	a
a	–	–	–	c	b	d	a

Problemstellung

Abstraktion:

- lediglich Vergleich einzelner Zeichen, nicht ganzer Zeilen
- als mögliche Veränderungen nur Löschung, Einfügung oder Änderung eines Zeichens
- Anzahl solcher Operationen als Vergleichsmaß

Beispiel: Eingabe „abcbcba“ und „acbda“

$\rightsquigarrow$ mögliche Erklärungen des Unterschieds:

a	b	c	b	c	b	a
a	c	b	d	a	–	–

a	b	c	b	c	b	–	a
a	–	–	–	c	b	d	a

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	d	a	–

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` ...
  `t[0]` ...

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` $\cdots$ (`s[1]...s[n-1]`)
  `t[0]` $\cdots$ (`t[1]...t[m-1]`)

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `t[0]` $\cdots$ `(t[1]...t[m-1])`

- `s[0]` $\cdots$
  `_` $\cdots$

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `t[0]` $\cdots$ `(t[1]...t[m-1])`

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[0]...t[m-1])`

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `t[0]` $\cdots$ `(t[1]...t[m-1])`

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[0]...t[m-1])`

- `-` $\cdots$
  `t[0]` $\cdots$

Formalisierung

Gegeben: `char s[n], t[m];`

Gesucht: Distanz d zwischen `s` und `t` als minimale Anzahl von Edit-Operationen

Idee: zunächst Entscheidung, ob `s[0]` und `t[0]` einander gegenübergestellt, oder eines der beiden gelöscht/eingefügt werden soll $\rightsquigarrow$ 3 Fälle:

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `t[0]` $\cdots$ `(t[1]...t[m-1])`

- `s[0]` $\cdots$ `(s[1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[0]...t[m-1])`

- `-` $\cdots$ `(s[0]...s[n-1])`
  `t[0]` $\cdots$ `(t[1]...t[m-1])`

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ (`s[i+1]...s[n-1]`)
  `-` $\cdots$ (`t[j]...t[m-1]`)

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ (`s[i+1]...s[n-1]`)
  `-` $\cdots$ (`t[j]...t[m-1]`)

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i,j+1}$

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i,j+1}$

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i,j+1}$

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow \begin{cases} d_{i+1,j+1} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ \end{cases}$

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i,j+1}$

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $$\rightsquigarrow \begin{cases} d_{i+1,j+1} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + d_{i+1,j+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursionsgleichungen (I)

Gesucht: allgemein Distanz $d_{i,j}$ zwischen `s[i]...s[n-1]` und `t[j]...t[m-1]`

Ansatz: Fallunterscheidung (wie eben) ergibt:

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `-` $\cdots$ `(t[j]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i+1,j}$

- `-` $\cdots$ `(s[i]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $\rightsquigarrow 1 + d_{i,j+1}$

- `s[i]` $\cdots$ `(s[i+1]...s[n-1])`
  `t[j]` $\cdots$ `(t[j+1]...t[m-1])`

  $$\rightsquigarrow \begin{cases} d_{i+1,j+1} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + d_{i+1,j+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt ist das Minimum zu wählen!

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

- `s[n]...s[n-1]`
  `t[j]...t[m-1]`

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

- `-  ...  -`
  `t[j]...t[m-1]`
  $\rightsquigarrow m - j$

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

- `_ ... _`
  `t[j]...t[m-1]`
  $\rightsquigarrow m - j$

- `s[i]...s[n-1]`
  `t[m]...t[m-1]`

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

- `_ ... _`
  `t[j]...t[m-1]`
  $\rightsquigarrow m - j$

- `s[i]...s[n-1]`
  `_ ... _`
  $\rightsquigarrow n - i$

Rekursionsgleichungen (II)

Sonderfälle: $i = n$ oder $j = m$:

- `-  ...  -`
  `t[j]...t[m-1]`
  $\rightsquigarrow m - j$

- `s[i]...s[n-1]`
  `-  ...  -`
  $\rightsquigarrow n - i$

Insgesamt:

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]=abcbcba` und `t[0]...t[4]=acbda`

Berechnung:

$$d_{0,0} = min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\}$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Berechnung:

$$d_{0,0} = min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\}$$
$$= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\}$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]=abcbcba` und `t[0]...t[4]=acbda`

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= min\{2 + min\{1 + min\{d_{3,0}\,;\, d_{2,1}\,;\, d_{3,1}\}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= min\{2 + min\{1 + min\{d_{3,0}\,;\, d_{2,1}\,;\, d_{3,1}\}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]`=abcbcba und `t[0]...t[4]`=acbda

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= min\{2 + min\{1 + min\{d_{3,0}\,;\, d_{2,1}\,;\, d_{3,1}\}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Problem: mehrfache Berechnung der gleichen Werte

Beispiel

Eingabe: `s[0]...s[6]=abcbcba` und `t[0]...t[4]=acbda`

Berechnung:

$$
\begin{aligned}
d_{0,0} &= min\{1 + d_{1,0}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{1 + 1 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,;\, 1 + d_{0,1}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 1 + 1 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,;\, d_{1,1}\} \\
&= min\{2 + min\{d_{2,0}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= min\{2 + min\{1 + min\{d_{3,0}\,;\, d_{2,1}\,;\, d_{3,1}\}\,;\, d_{1,1}\,;\, d_{2,1}\}\,; \\
&\qquad 2 + min\{d_{1,1}\,;\, d_{0,2}\,;\, d_{1,2}\}\,; \\
&\qquad 1 + min\{d_{2,1}\,;\, d_{1,2}\,;\, d_{2,2}\}\} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Problem: mehrfache Berechnung der gleichen Werte

Lösung: dynamische Programmierung

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a
a							
c							
b							
d							
a							

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
								0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
							1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
						2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
					3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
				4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
			5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
		6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a								1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a							0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a						1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a					2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a				3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a			4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a		5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d								2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d							1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d						1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d					2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d				3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d			4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d		5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b								3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b							2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b						1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b					2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b				2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b			3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b		4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c								4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c							3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c						2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c					1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c				2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c			2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c		3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a							4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a						3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a					2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a				2	2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a			3	2	2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:
- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

		a	b	c	b	c	b	a	
			3	3	2	2	3	4	5
a									
c	4	3	2	2	1	2	3	4	
b	5	4	3	2	2	1	2	3	
d	6	5	4	3	2	1	1	2	
a	6	5	4	3	2	1	0	1	
	7	6	5	4	3	2	1	0	

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dynamische Programmierung

Idee:

- Speicherung aller $d_{i,j}$ in Tabelle
- Berechnung in geeigneter Reihenfolge

Beispiel:

		a	b	c	b	c	b	a	
	a	3	3	3	2	2	3	4	5
	c	4	3	2	2	1	2	3	4
	b	5	4	3	2	2	1	2	3
	d	6	5	4	3	2	1	1	2
	a	6	5	4	3	2	1	0	1
		7	6	5	4	3	2	1	0

$$d_{i,j} = \begin{cases} m - j & \text{wenn } i = n \\ n - i & \text{wenn } j = m \\ min\{1 + d_{i+1,j}\,;\, 1 + d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{wenn } \texttt{s[i]==t[j]} \\ 1 + min\{d_{i+1,j}\,;\, d_{i,j+1}\,;\, d_{i+1,j+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a
c				
a				
b				
a				

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
		3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a				0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a			1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a		2	1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b					2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b				1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a
c				
a				
b				
a				

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					1
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					2
a					1
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b					2
a					1
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a					1
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a					1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a				0	1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b				1	2
a				0	1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a				2	3
b				1	2
a				0	1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b				1	2
a				0	1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b				1	2
a				0	1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b				1	2
a			1	0	1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
					0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					1
				1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a				0	1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					2
a				0	1
			2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					2
a				0	1
		3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					2
a			1	0	1
		3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					
b					
a					

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a					1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a				0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a			1	0	1
	4	3	2	1	0

Mögliche Reihenfolgen

	a	b	b	a	
c					
a					
b			0	1	2
a	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0

	a	b	b	a	
c				3	4
a				2	3
b			0	1	2
a			1	0	1
			2	1	0

	a	b	b	a	
c					
a					3
b				1	2
a			1	0	1
		3	2	1	0

	a	b	b	a	
c					4
a					3
b					2
a		2	1	0	1
	4	3	2	1	0

In C:

```
int min(int x, int y, int z)
{ ... };

int d[n+1][m+1];
int i,j;

for (i=0; i<=n; i++) d[i][m]=n-i;
for (j=0; j<m; j++) d[n][j]=m-j;

for (j=m-1; j>=0; j--)
  for (i=n-1; i>=0; i--)
    { if (s[i]==t[j])
        d[i][j]=min(1+d[i+1][j],1+d[i][j+1],d[i+1][j+1]);
      else
        d[i][j]=1+min(d[i+1][j],d[i][j+1],d[i+1][j+1]);
    }
```

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz
(etwa

a	b	c	b	c	b	–	a
a	–	–	–	c	b	d	a

aber für optimale Distanz 3)

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a
a							
c							
b							
d							
a							

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

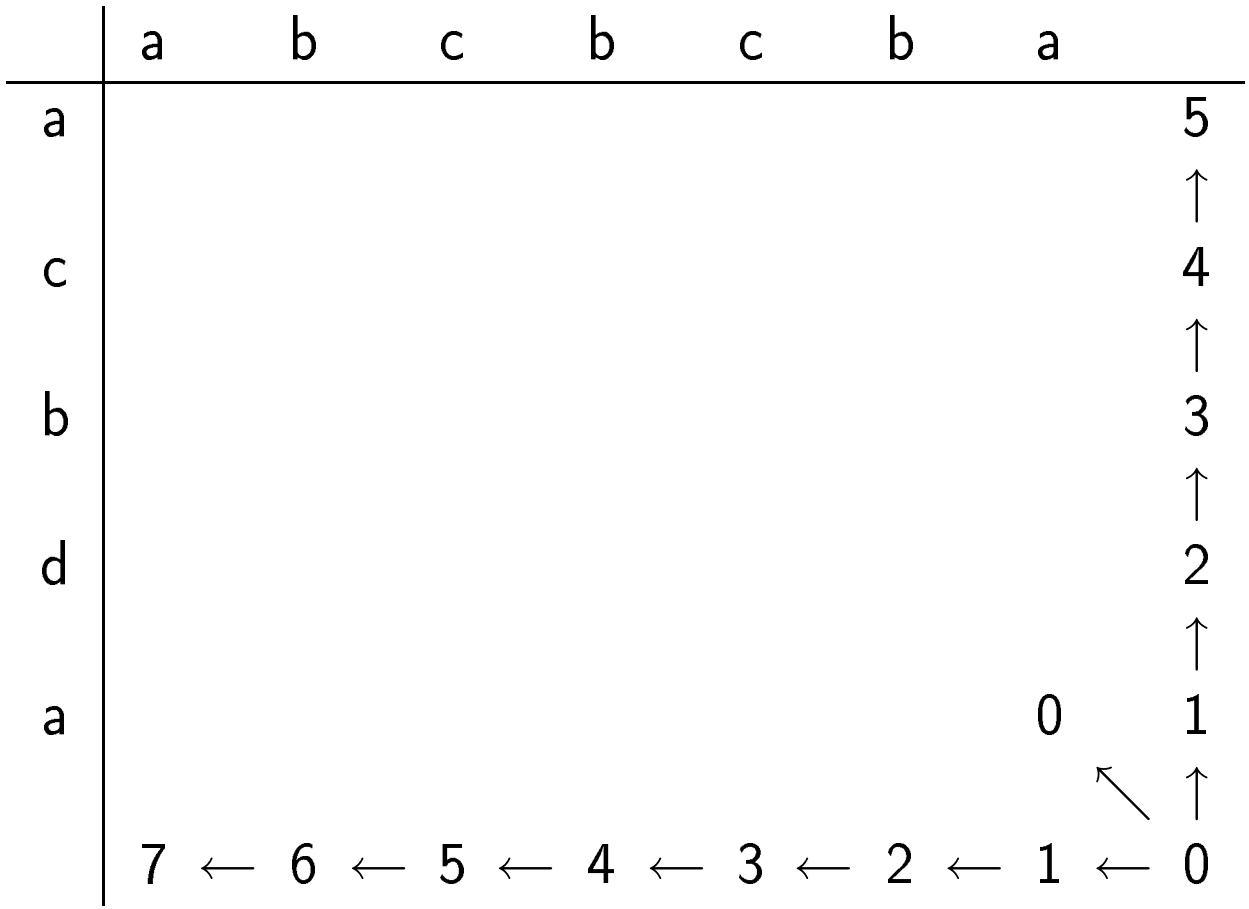
	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a								1
								↑
	7	← 6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:



Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a						1	← 0	1
							↖	↑
	7	← 6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a					2 ←	1 ←	0	1
							↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a				3 ←	2 ←	1 ←	0	1
							↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a			4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
							↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a		5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
							↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

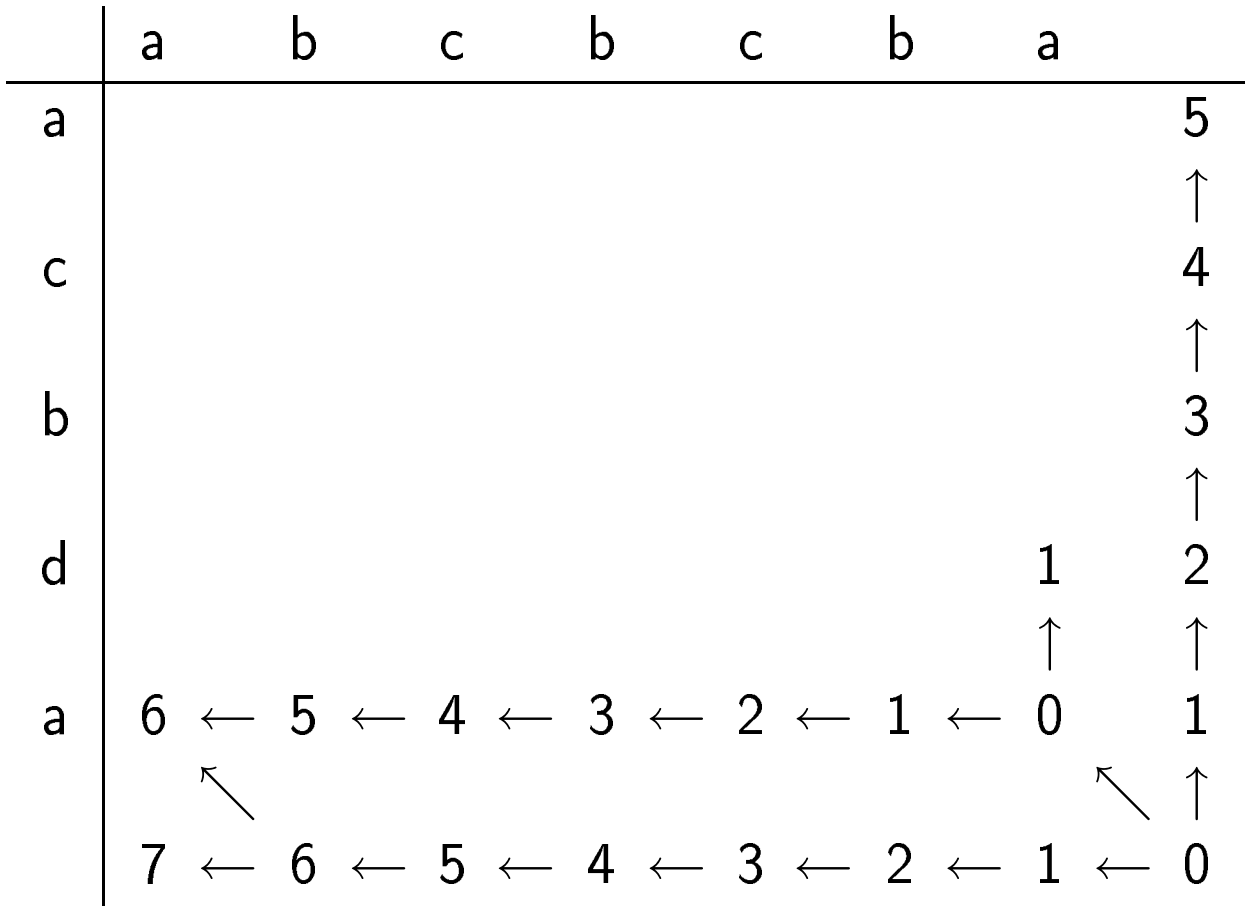
	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d								2
								↑
a	6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0	1
		↖					↖	↑
	7	← 6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

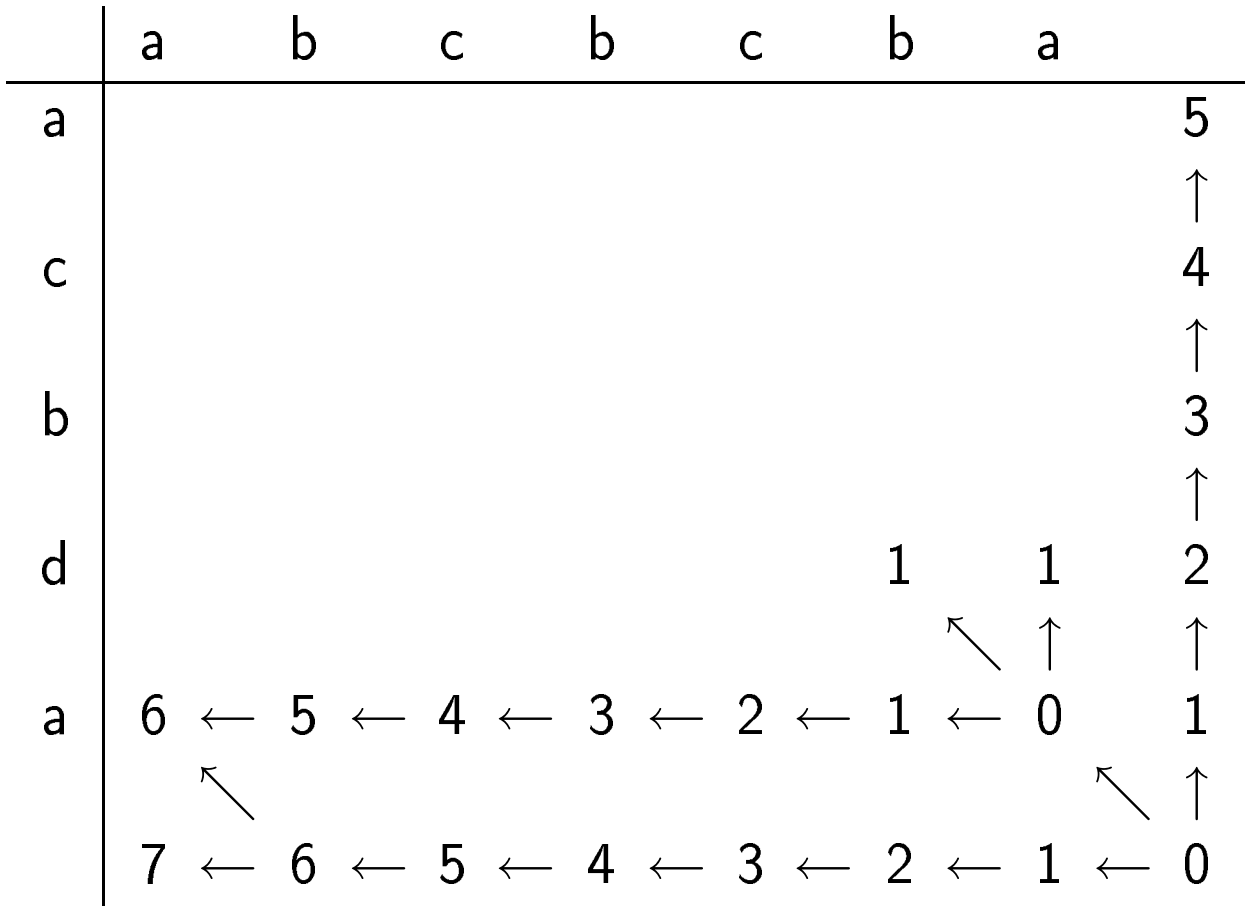


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

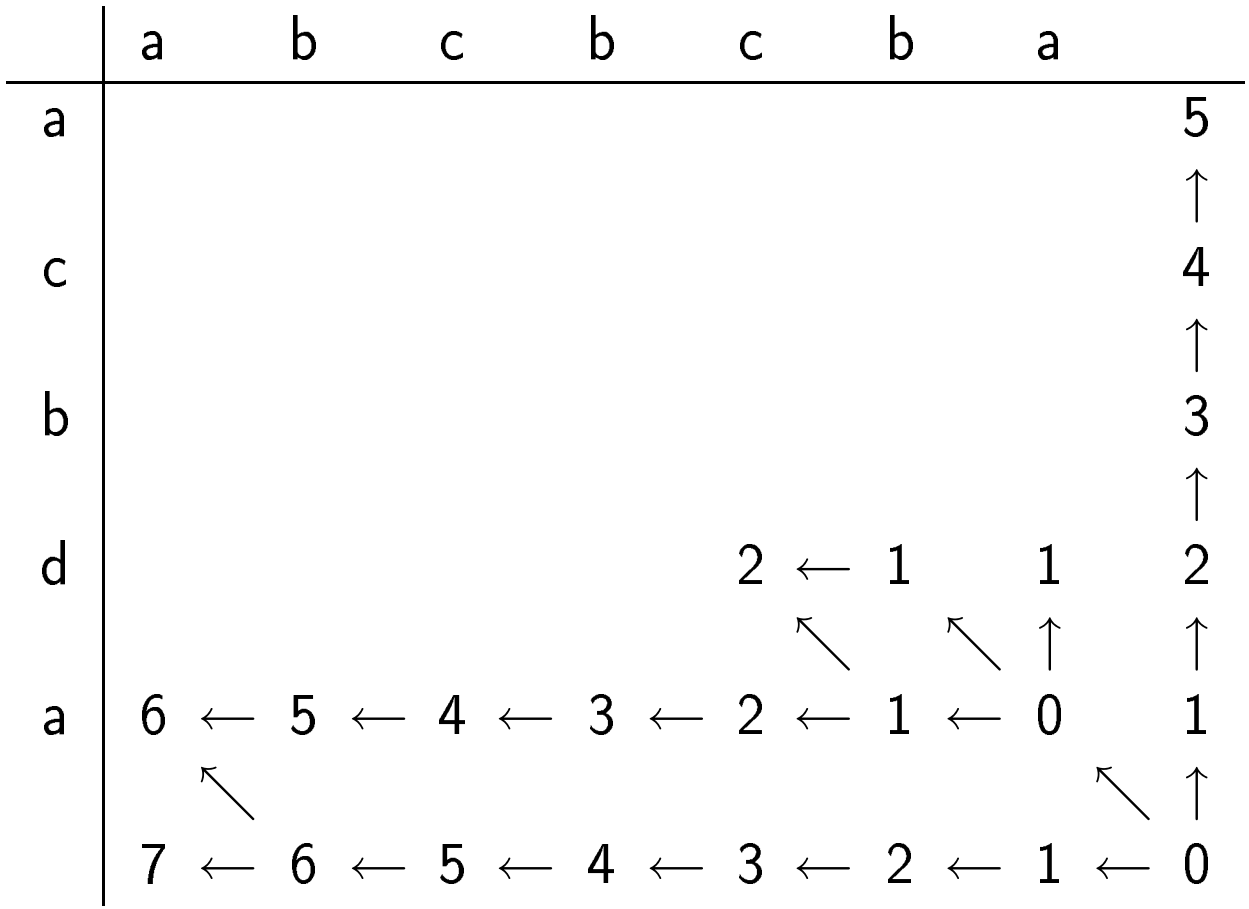


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

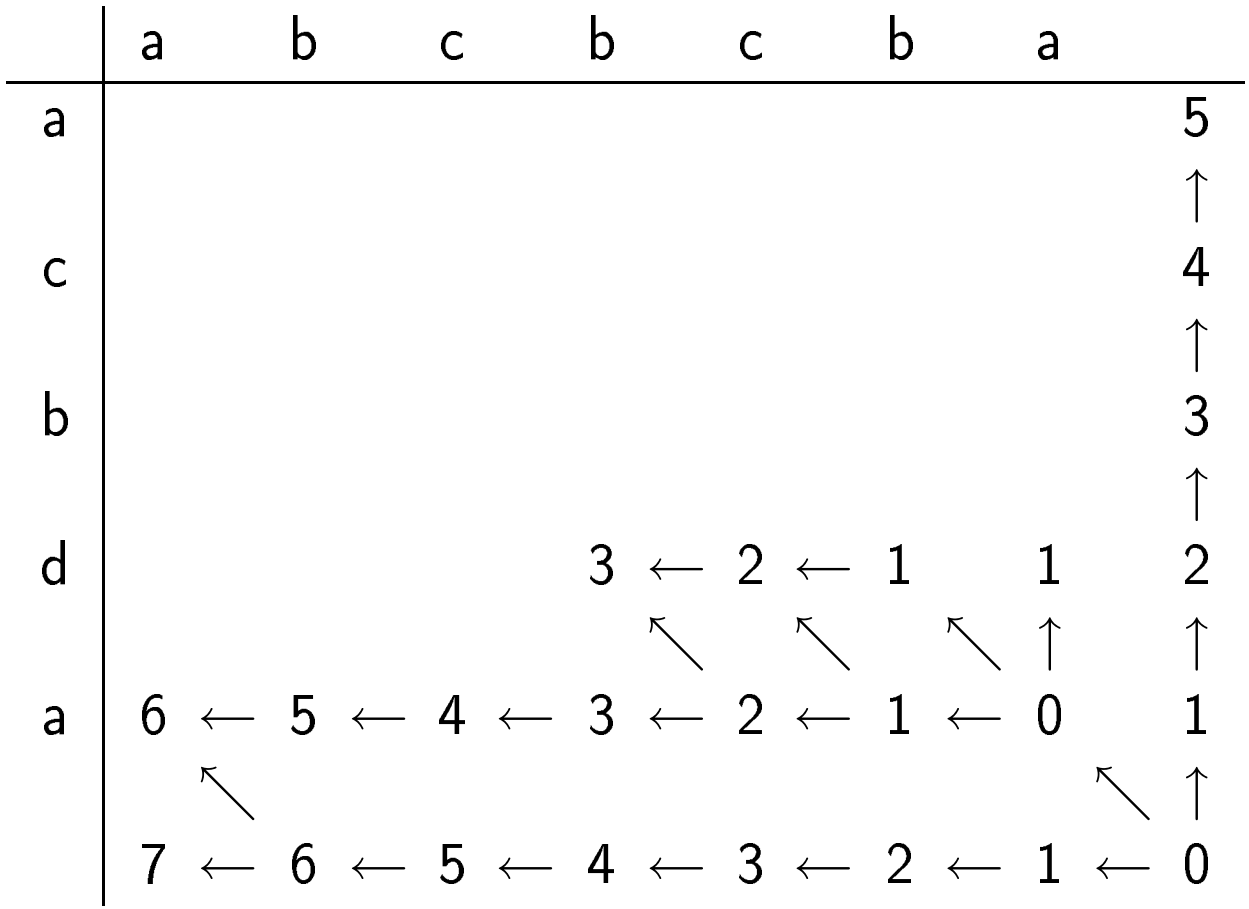


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:



Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

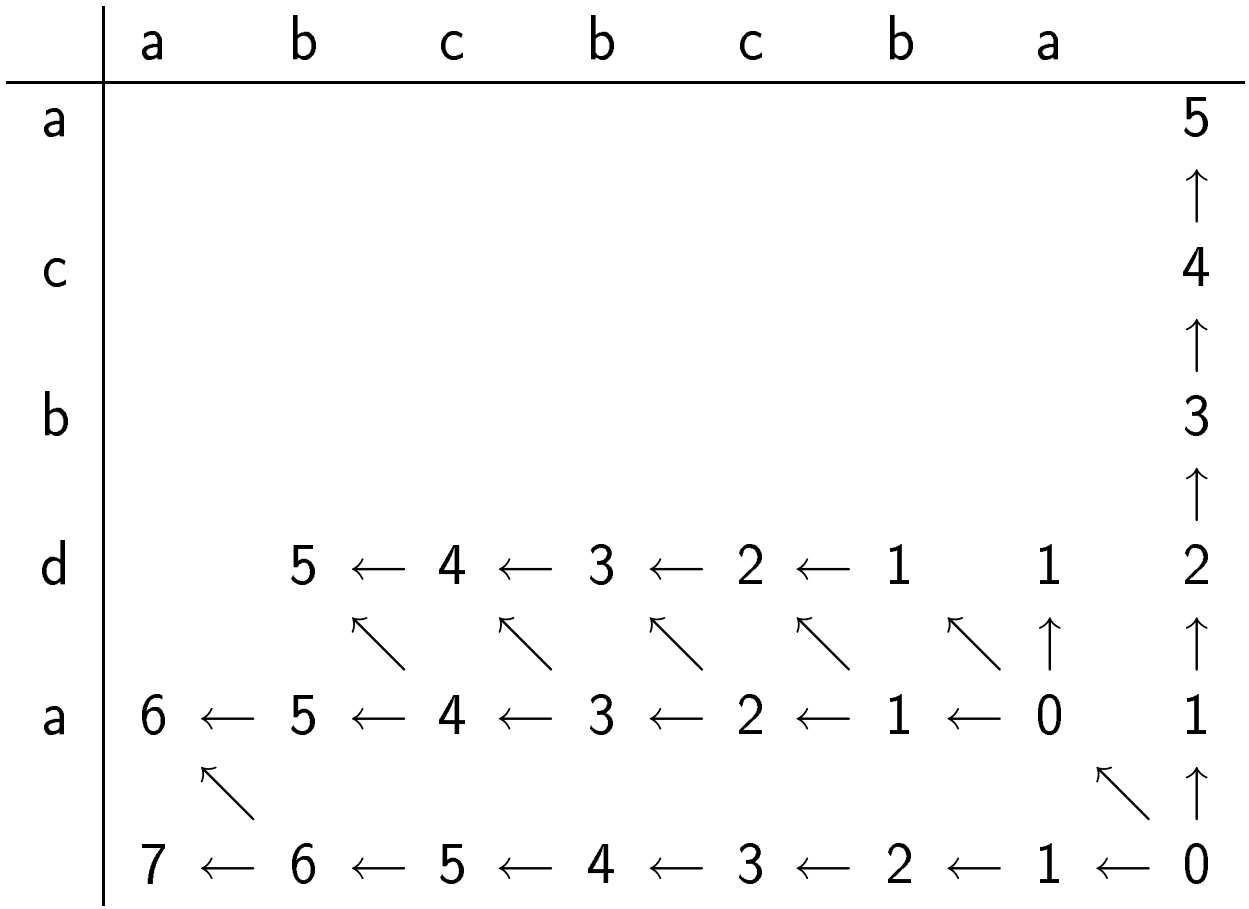
	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b								3
								↑
d			4	← 3	← 2	← 1	1	2
			↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0	1
	↖						↖	↑
	7	← 6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

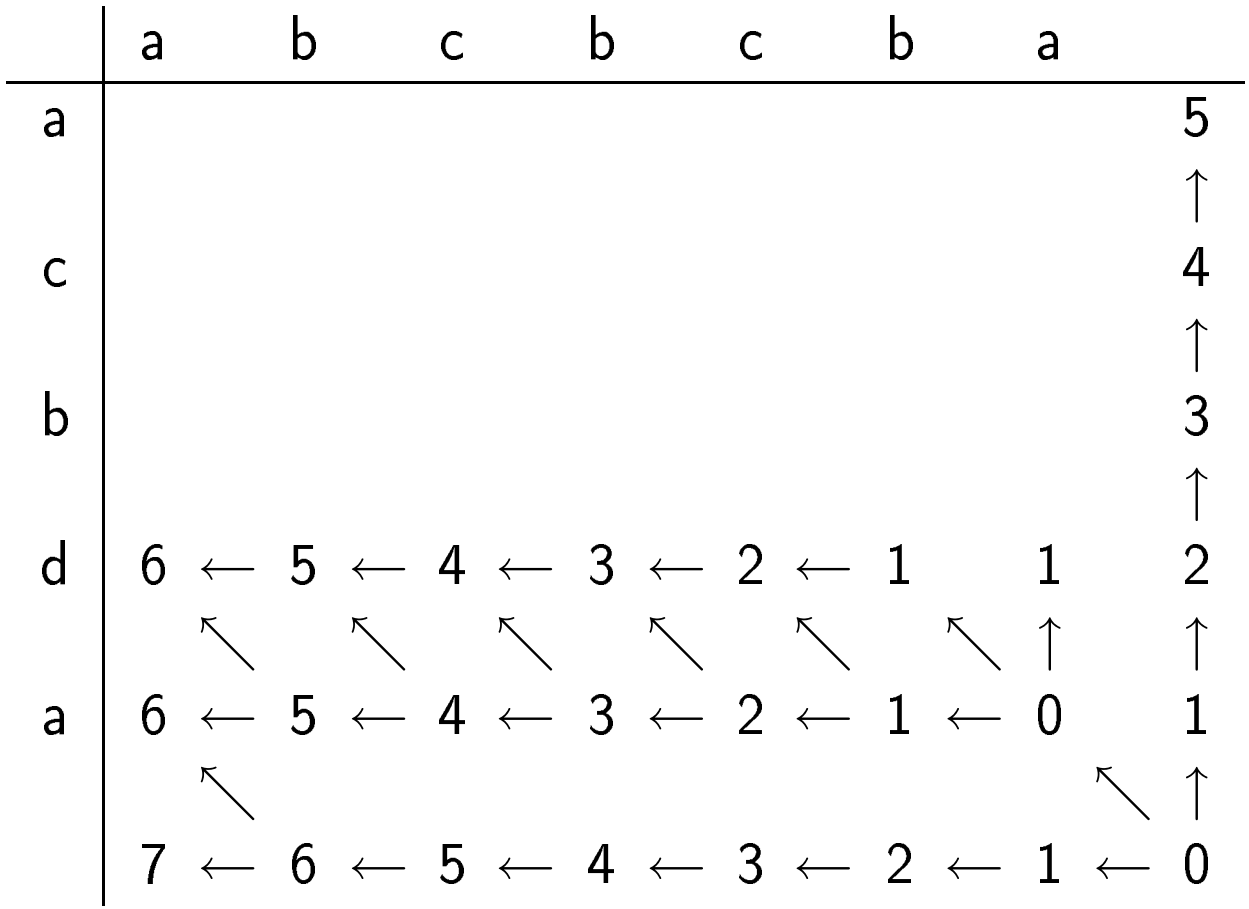


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

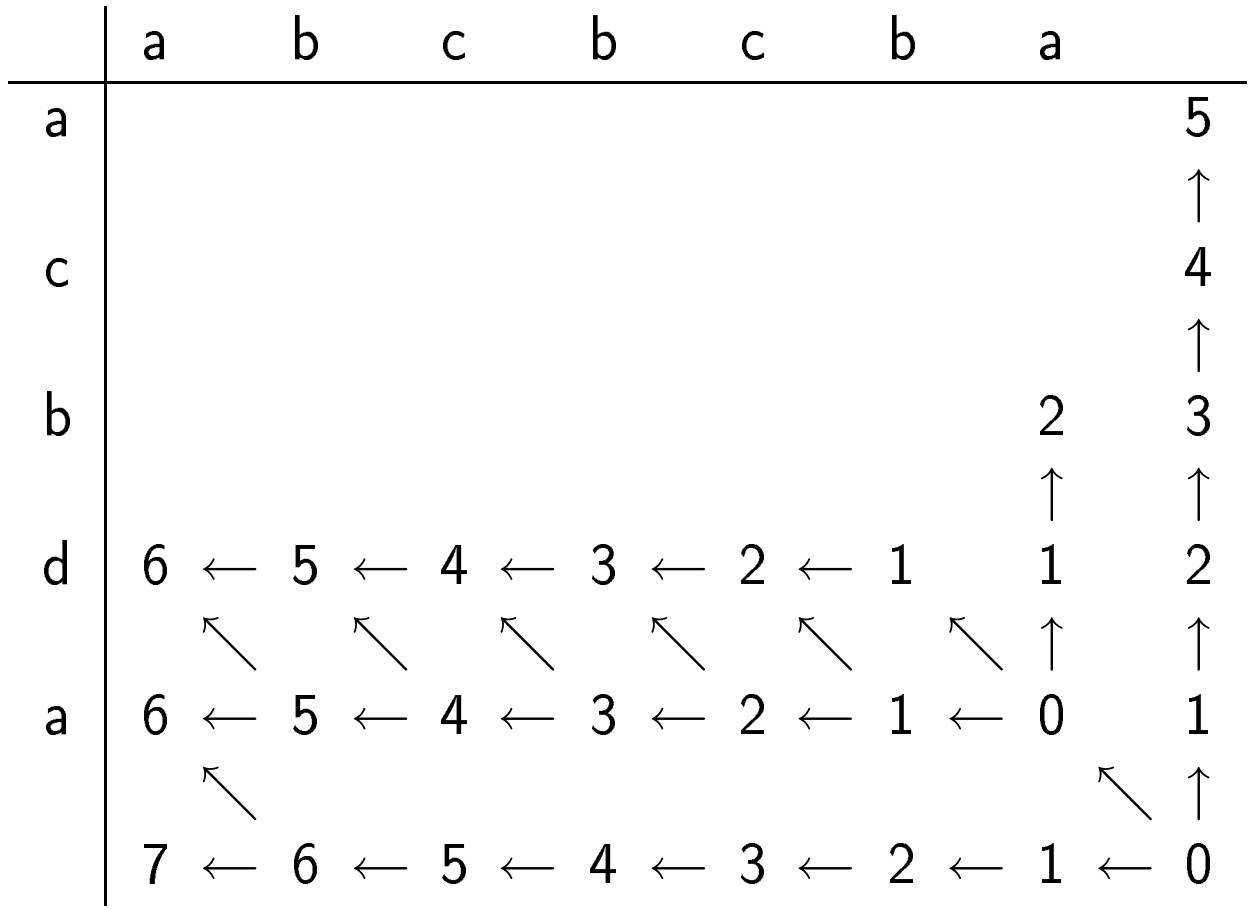


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

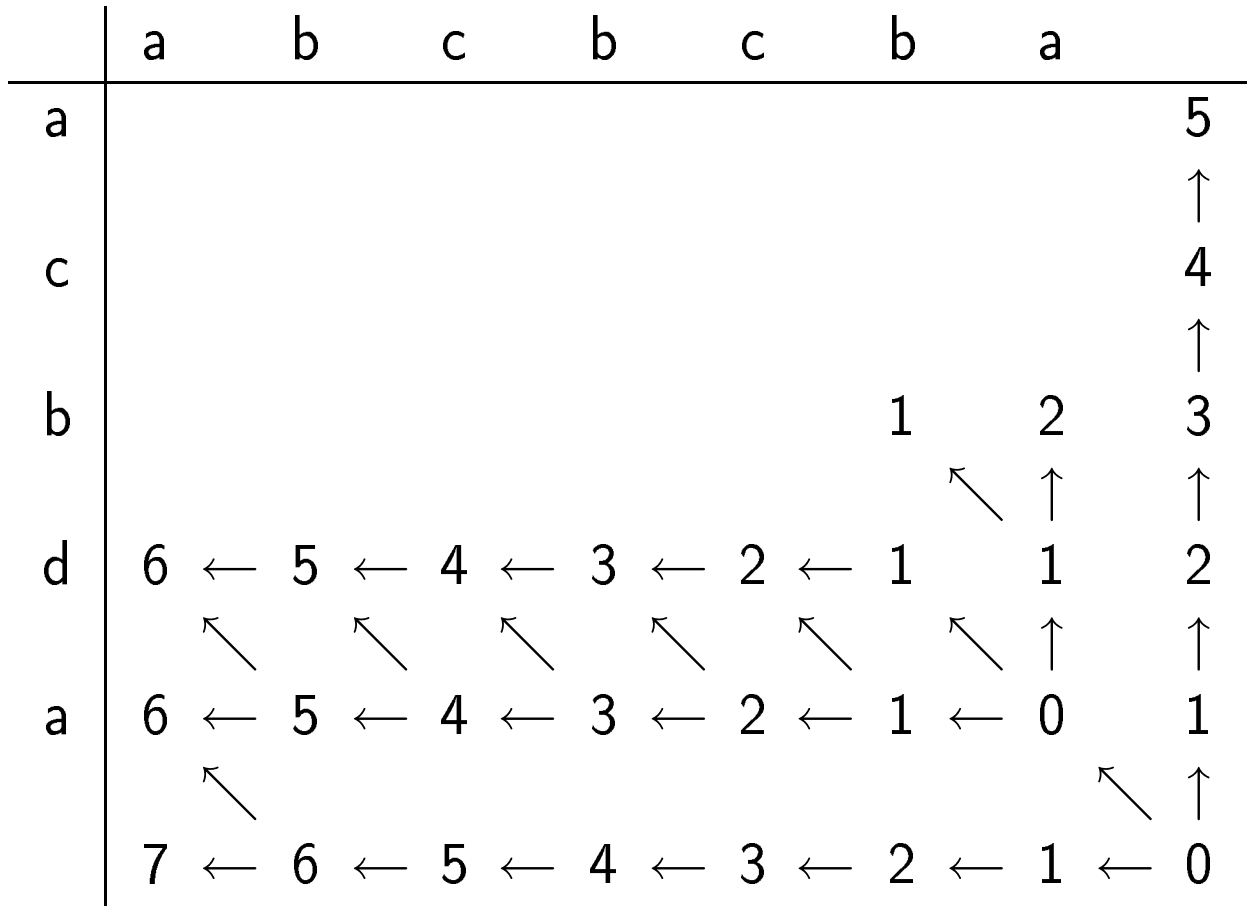


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:



Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

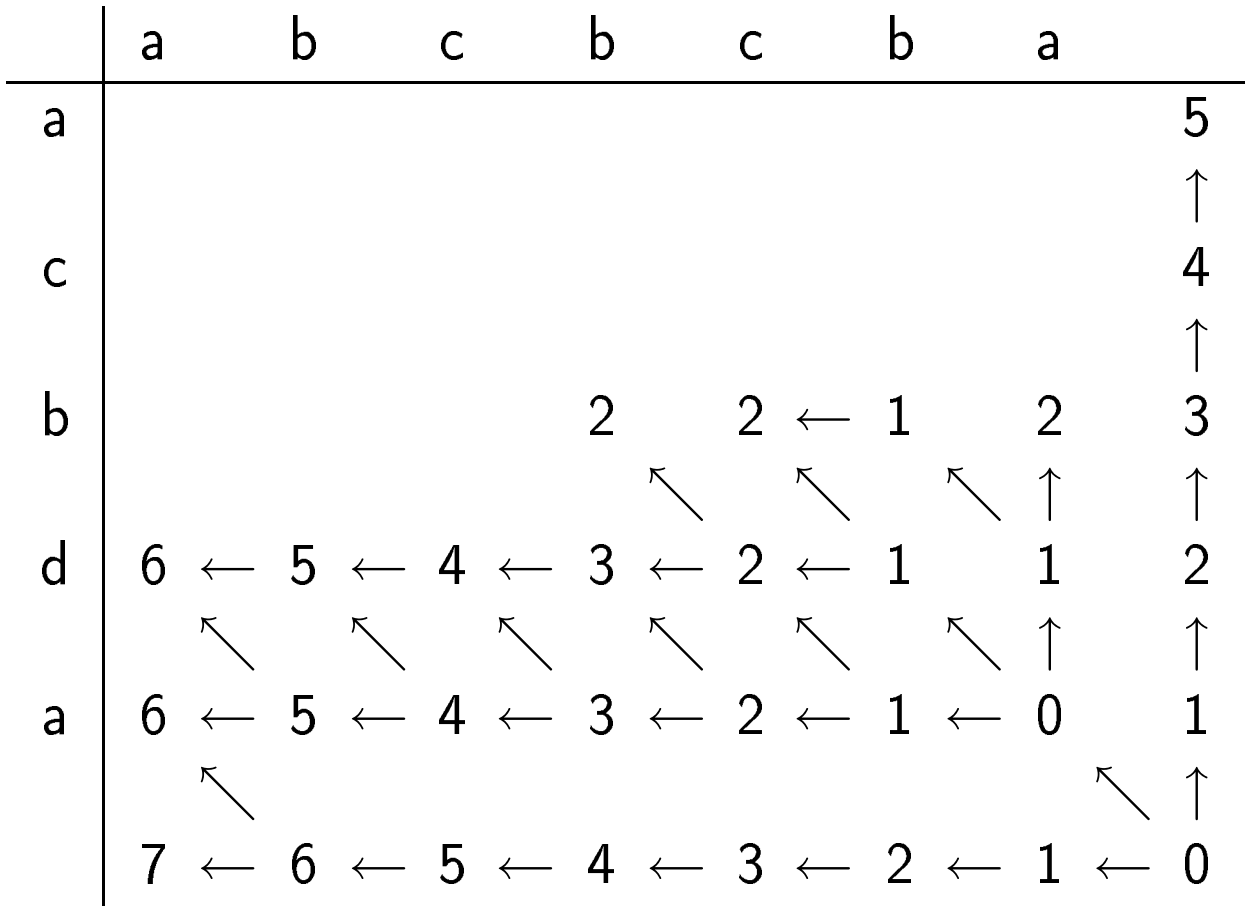
	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c								4
								↑
b					2 ←	1	2	3
					↖	↖	↑	↑
d	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
	↖						↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

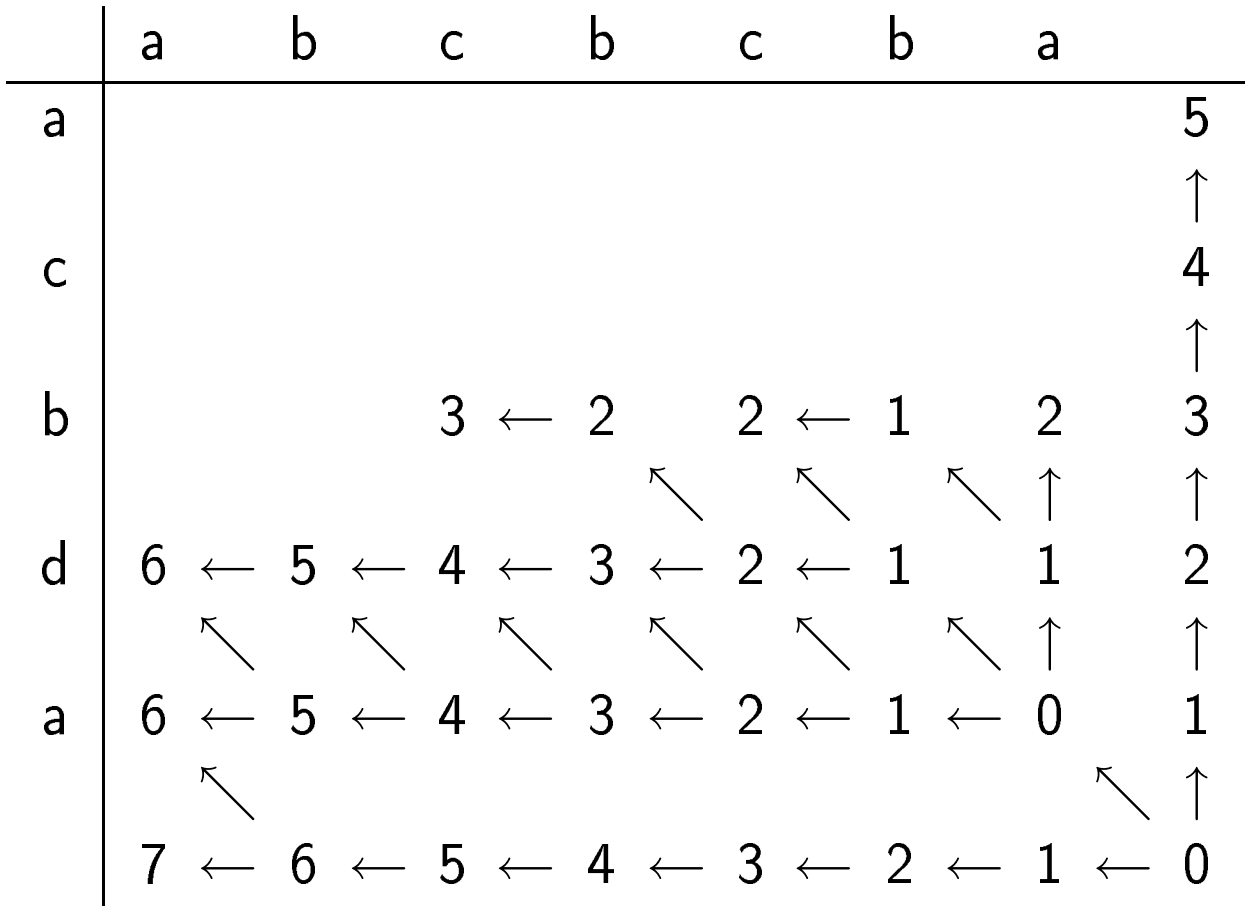


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

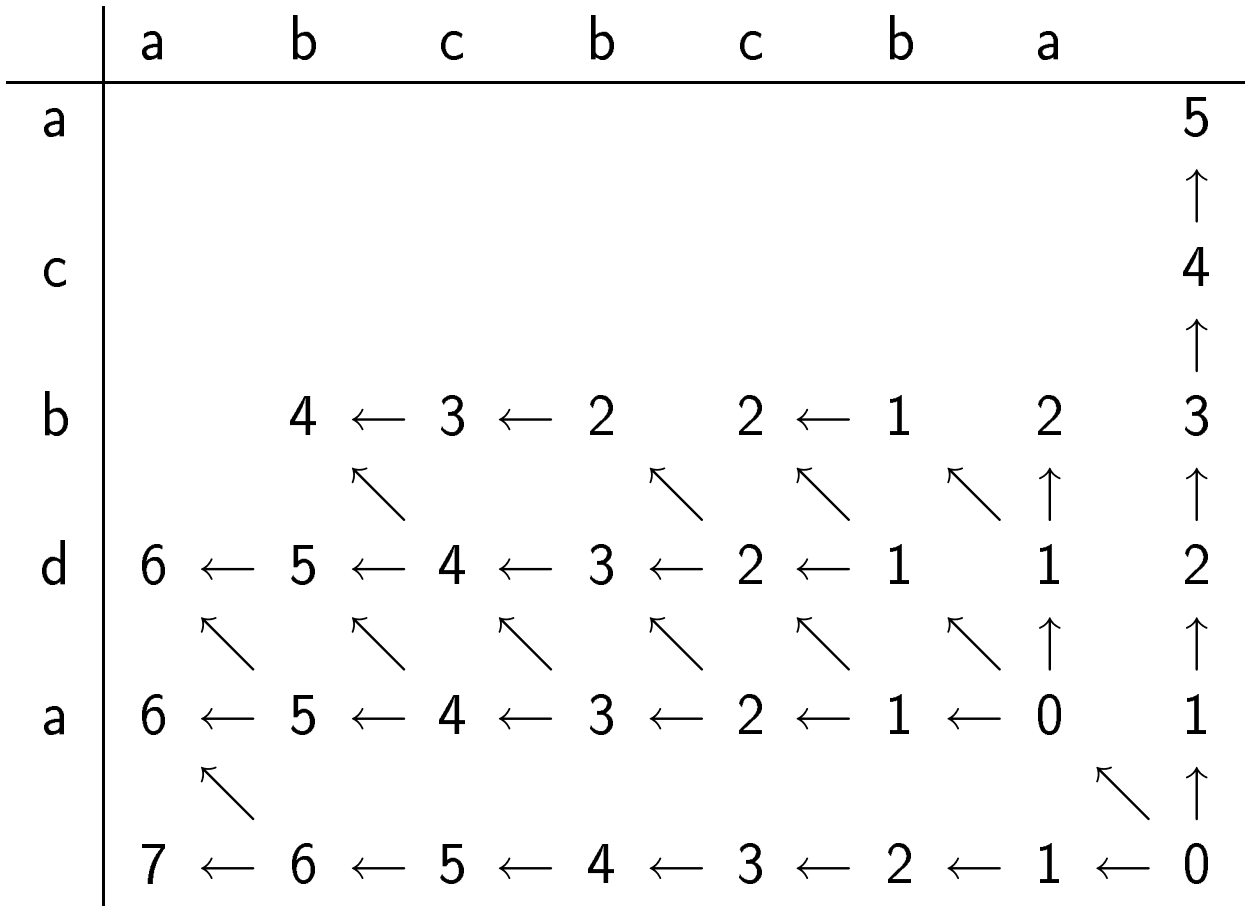


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

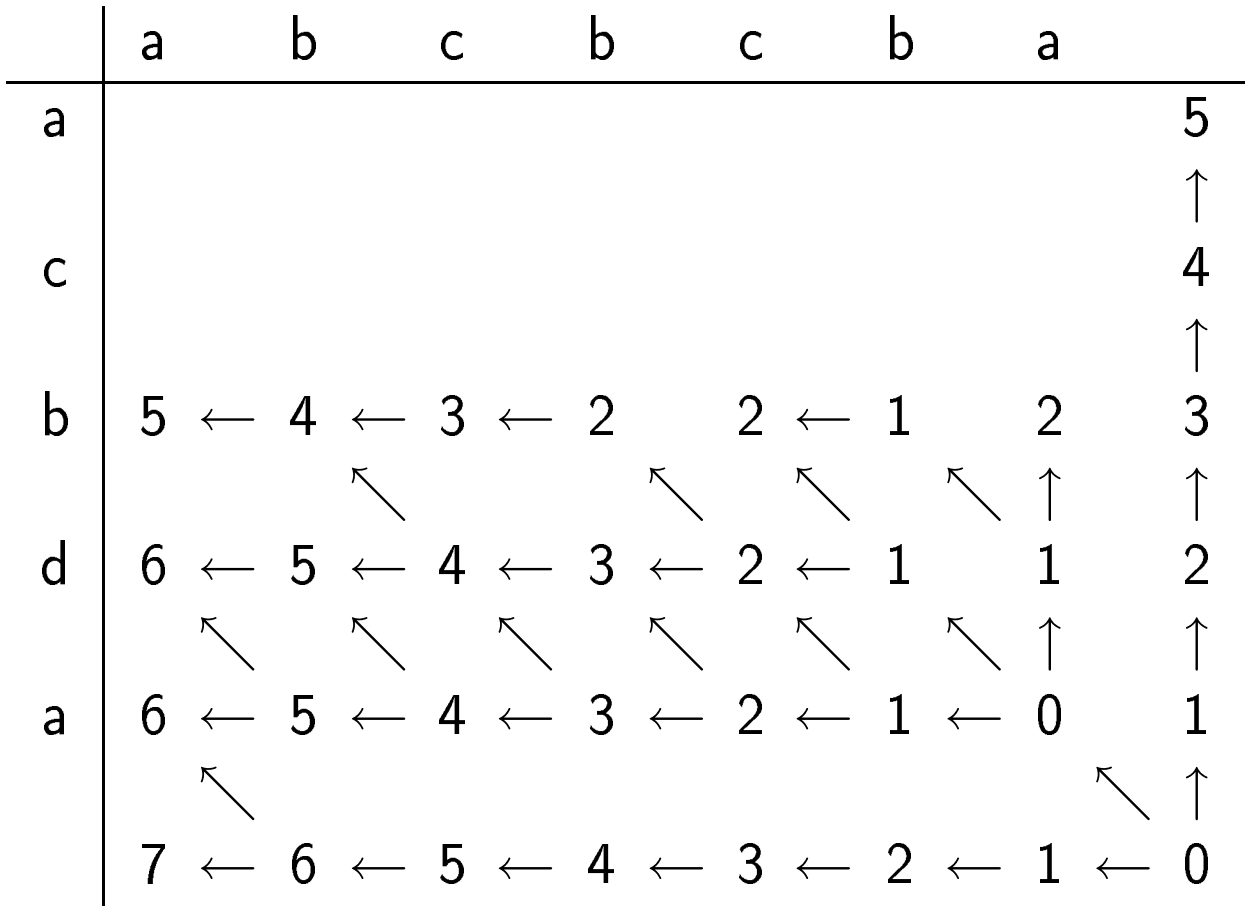


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

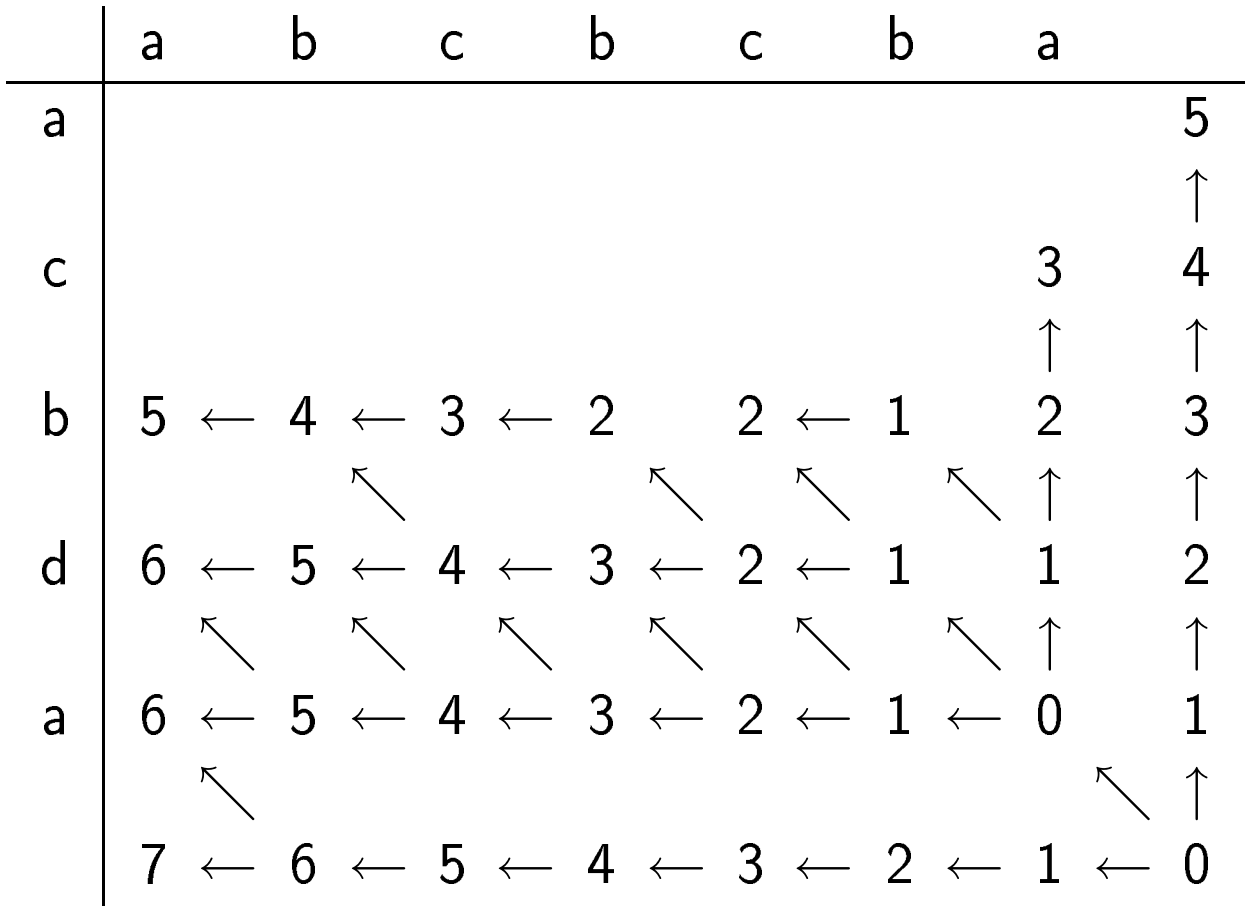


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

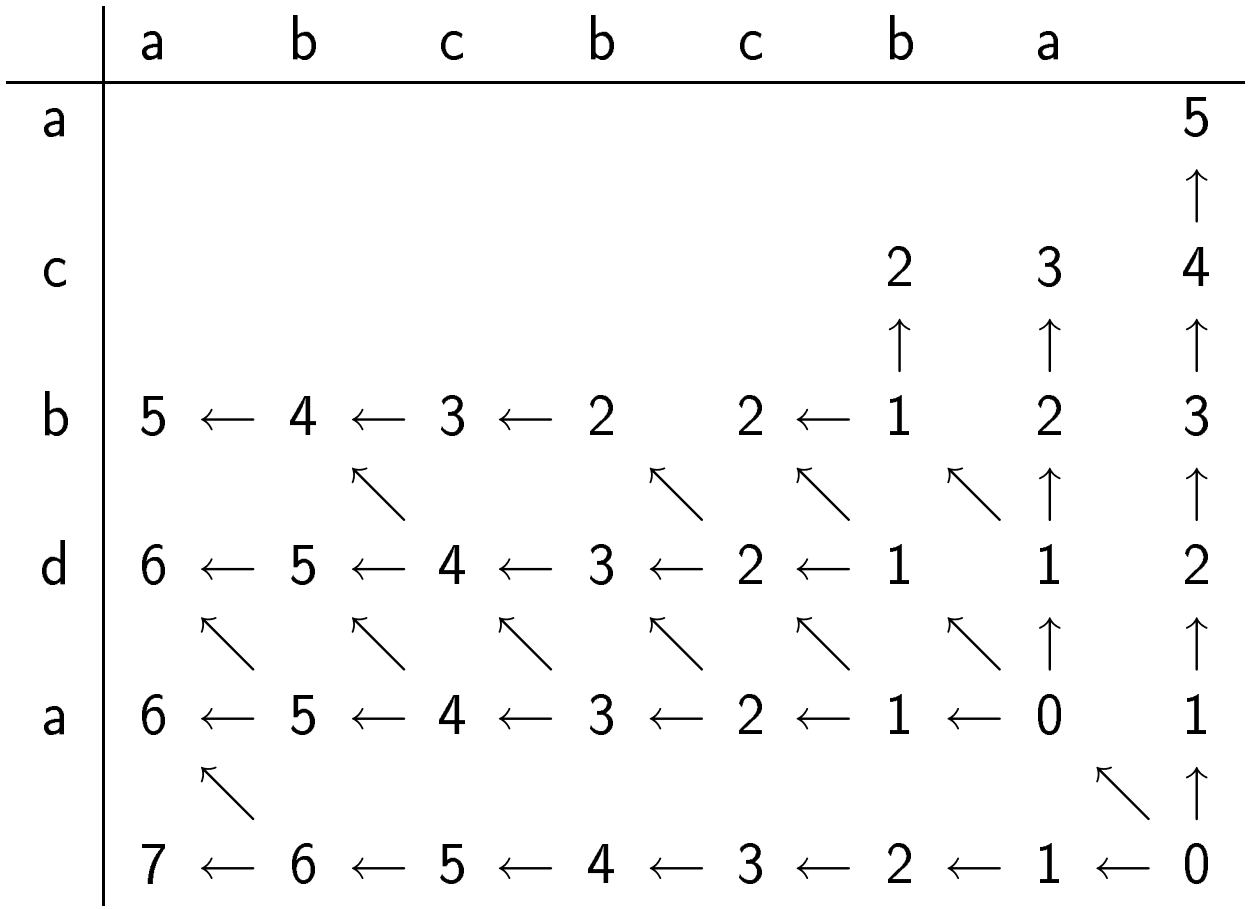


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

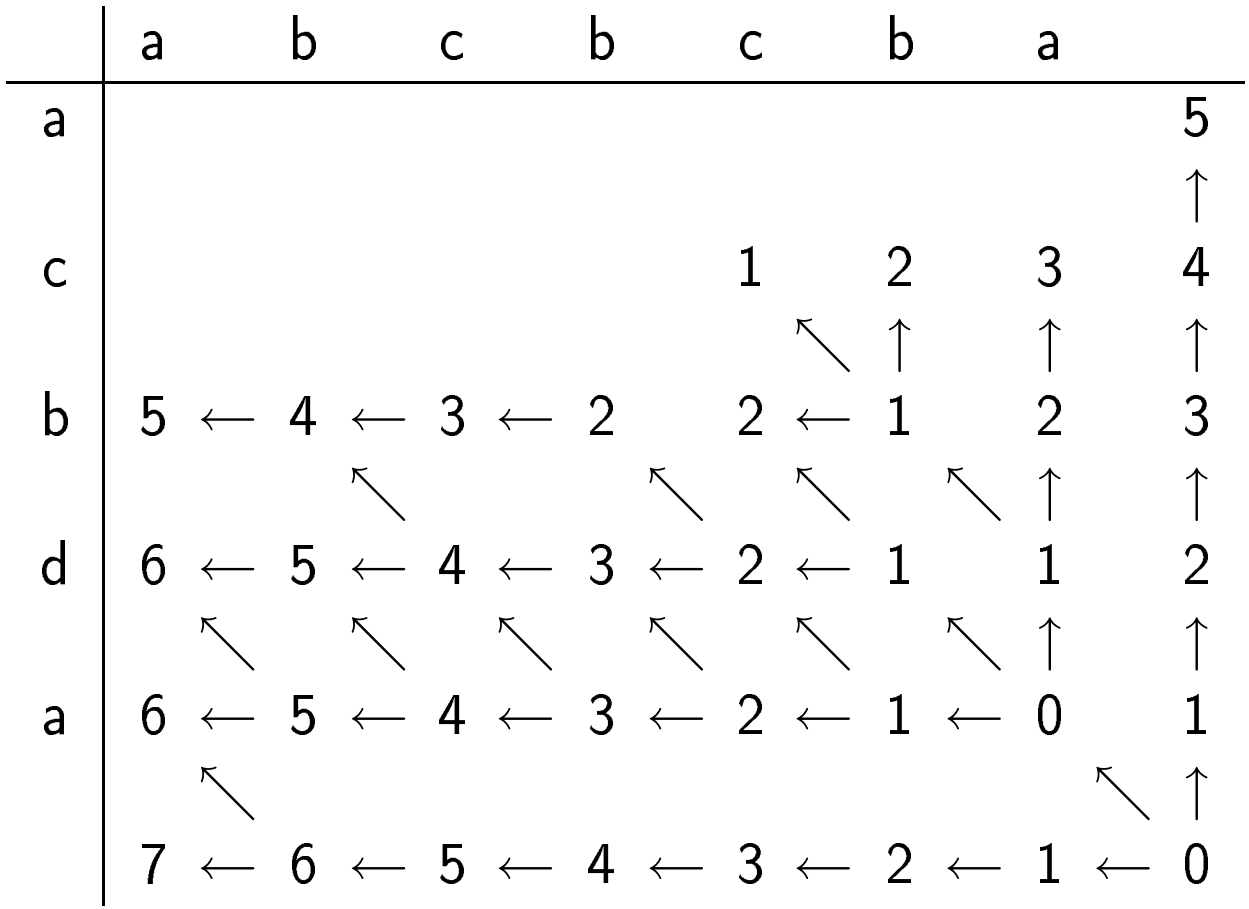


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

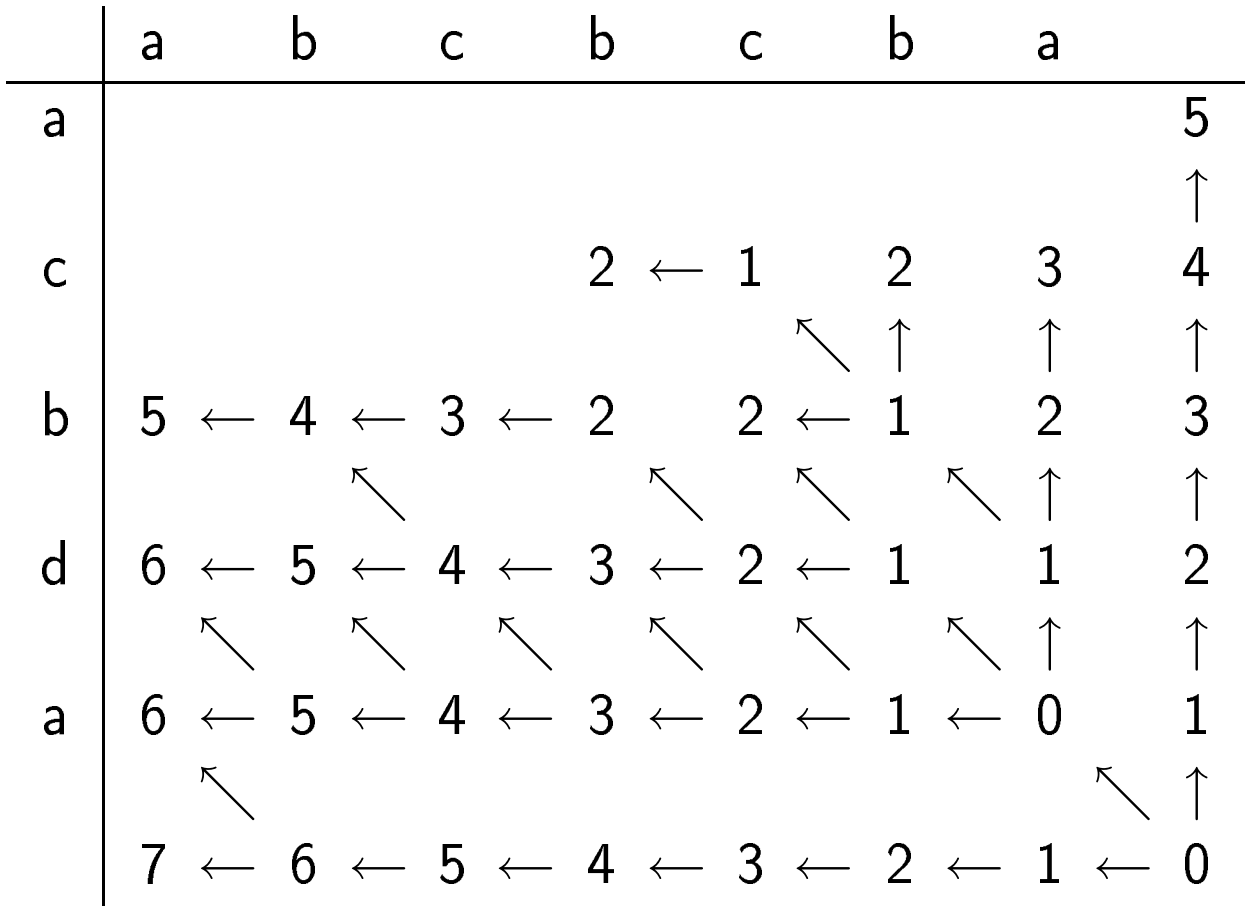


Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:



Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c			2	2 ←	1	2	3	4
			↖		↖	↑	↑	↑
b	5 ←	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3
		↖		↖	↖	↖	↑	↑
d	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
	↖						↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

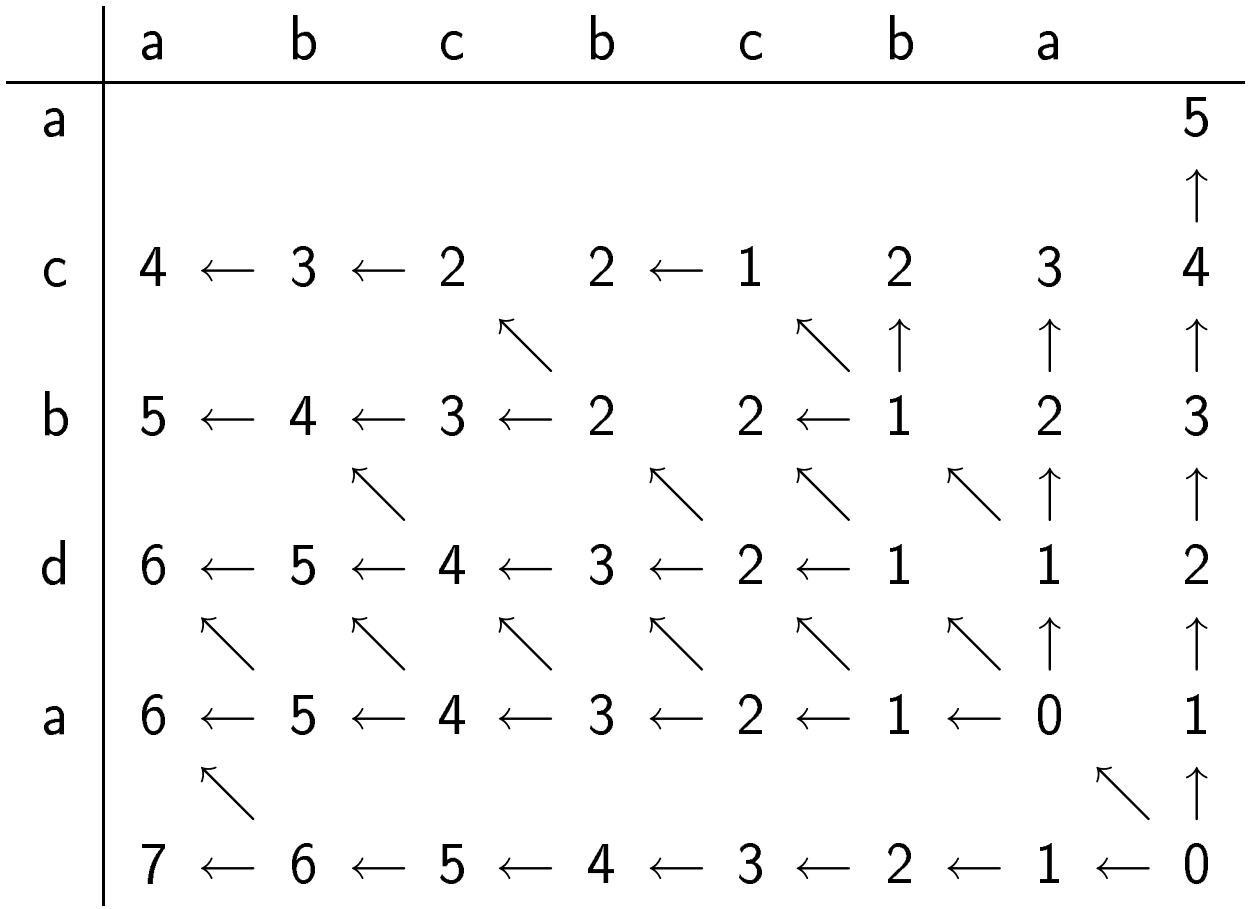
	a	b	c	b	c	b	a	
a								5
								↑
c		3 ←	2	2 ←	1	2	3	4
			↖		↖	↑	↑	↑
b	5 ←	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3
		↖		↖	↖	↖	↑	↑
d	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
	↖						↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:



Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a							4	5
							↑ ↖	↑
c	4	← 3	← 2	2	← 1	2	3	4
			↖		↖ ↑		↑	↑
b	5	← 4	← 3	← 2	2	← 1	2	3
		↖		↖	↖	↖	↑	↑
d	6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0	1
	↖						↖	↑
	7	← 6	← 5	← 4	← 3	← 2	← 1	← 0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a						3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a					2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a				2	2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a			3 ←	2	2	3	4	5
			↑ ↖	↖	↑	↑	↑ ↖	↑
c	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3	4
			↖		↖	↑	↑	↑
b	5 ←	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3
		↖		↖	↖	↖	↑	↑
d	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
	↖						↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a	0	3	3 ←	2	2	3	4	5
		↖	↑ ↖	↖	↖ ↑	↑	↑	↖ ↑
c	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3	4
			↖		↖	↑	↑	↑
b	5 ←	4 ←	3 ←	2	2 ←	1	2	3
		↖		↖	↖	↖	↑	↑
d	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1	1	2
	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↑	↑
a	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0	1
	↖						↖	↑
	7 ←	6 ←	5 ←	4 ←	3 ←	2 ←	1 ←	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a	3	3	3	2	2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

Retracing (I)

Problem: Auffinden der Anordnung für die minimale Distanz

Ansatz: „Herkunft“ der minimalen Werte in Tabelle festhalten

Beispiel:

		a		b		c		b		c		b		a		
		↖		↖		↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
a	3		3		3	←	2		2		3		4		5	
		↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑		↑	
c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4	
						↖				↖	↑		↑		↑	
b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3	
				↖				↖		↖		↖	↑		↑	
d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2	
		↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑	
a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1	
		↖												↖	↑	
	7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0	

Lösung: Verfolgen aller Wege von $d_{0,0}$ nach $d_{n,m}$

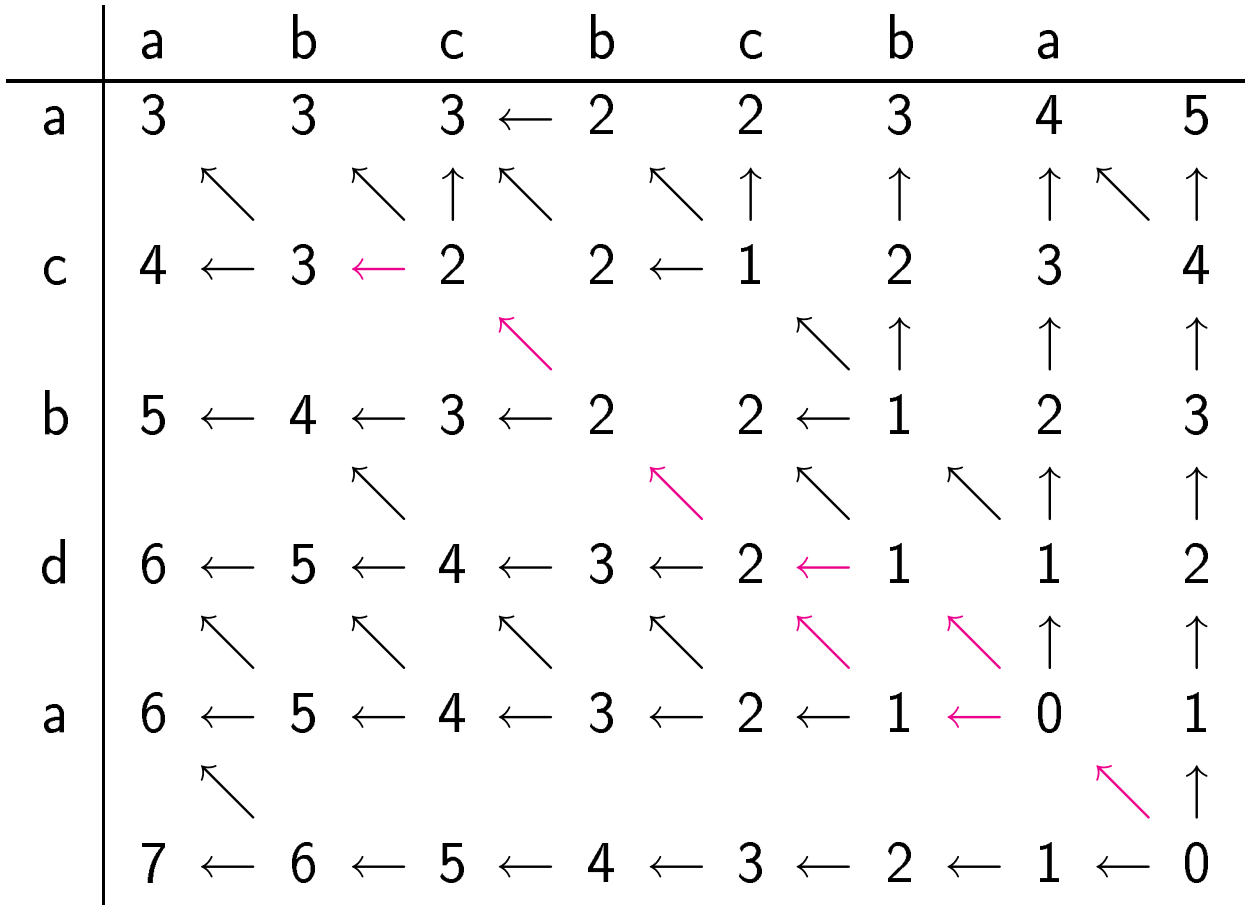
Retracing (II)

Beispiel:

	a		b		c		b		c		b		a		
a	3		3		3	←	2		2		3		4		5
		↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4
						↖				↖	↑		↑		↑
b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3
				↖				↖		↖		↖	↑		↑
d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2
		↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑
a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1
		↖												↖	↑
	7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0

Retracing (II)

Beispiel:



Ablesen: a

a

Retracing (II)

Beispiel:

		a		b		c		b		c		b		a		
	a	3		3		3	←	2		2		3		4		5
			↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
	c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4
							↖				↖	↑		↑		↑
	b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3
					↖				↖		↖		↖	↑		↑
	d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2
			↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑
	a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1
			↖												↖	↑
		7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0

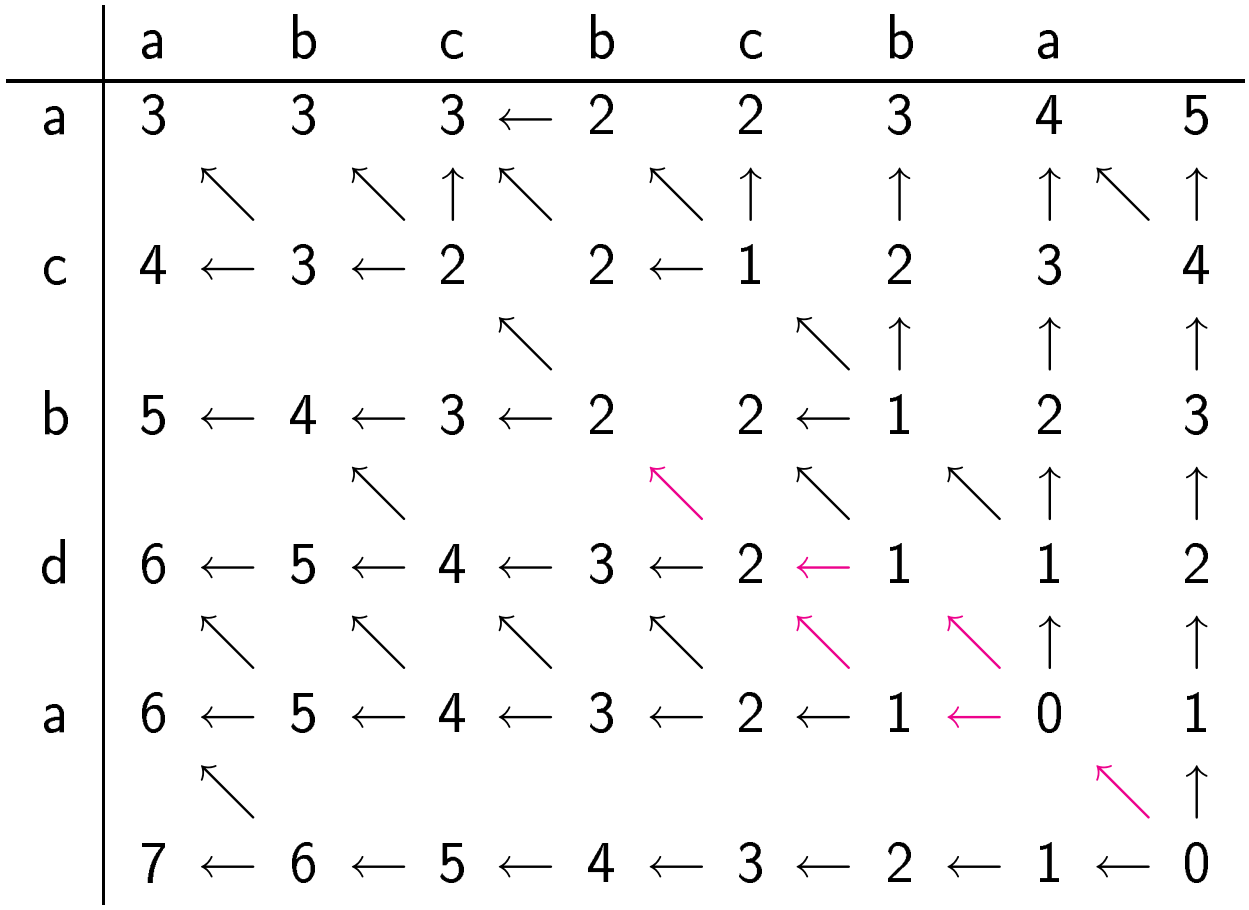
Ablesen:

a b

a –

Retracing (II)

Beispiel:

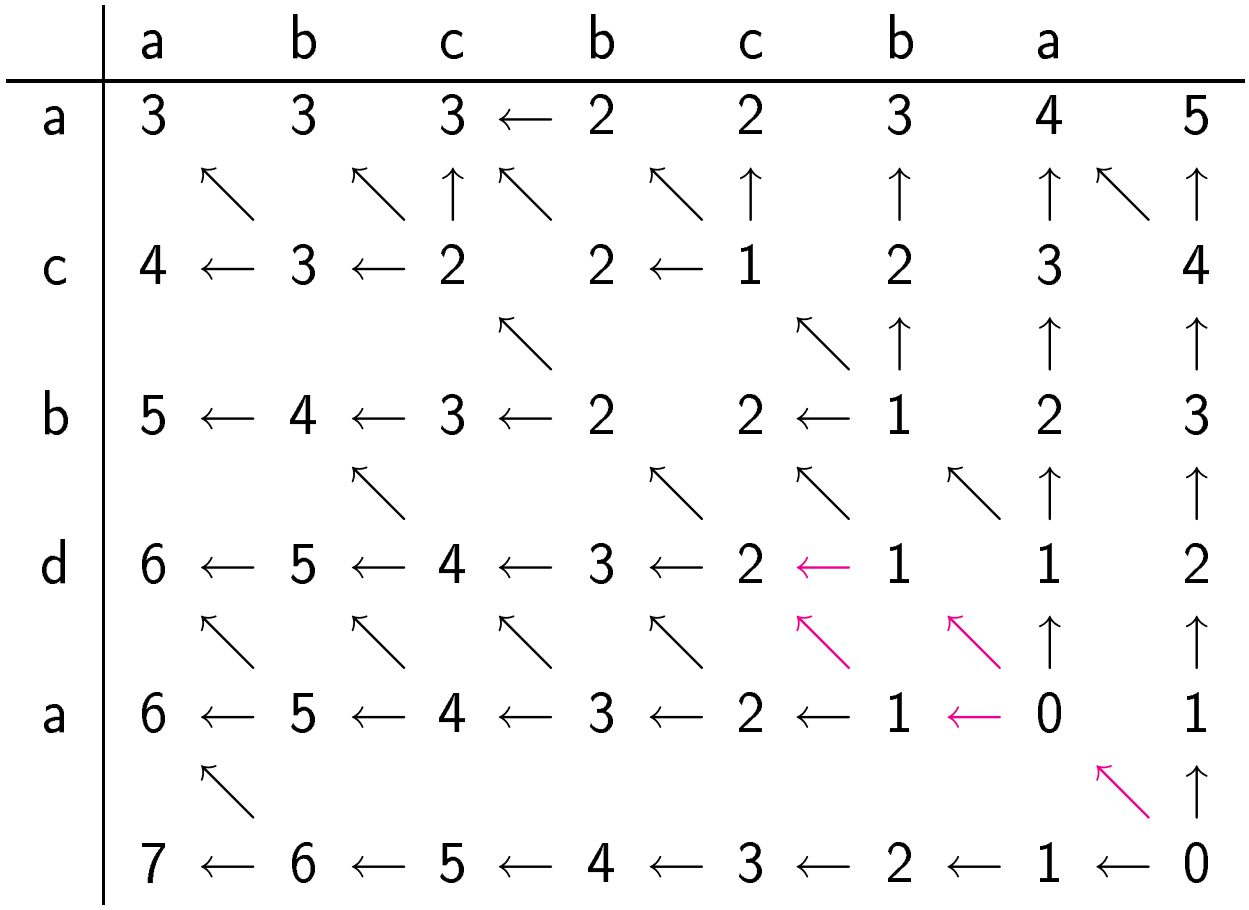


Ablesen:

a	b	c
a	–	c

Retracing (II)

Beispiel:



Ablesen:

a	b	c	b
a	–	c	b

Retracing (II)

Beispiel:

		a		b		c		b		c		b		a		
	a	3		3		3	←	2		2		3		4		5
			↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
	c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4
							↖				↖	↑		↑		↑
	b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3
					↖				↖		↖		↖	↑		↑
	d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2
			↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑
	a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1
			↖												↖	↑
		7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0

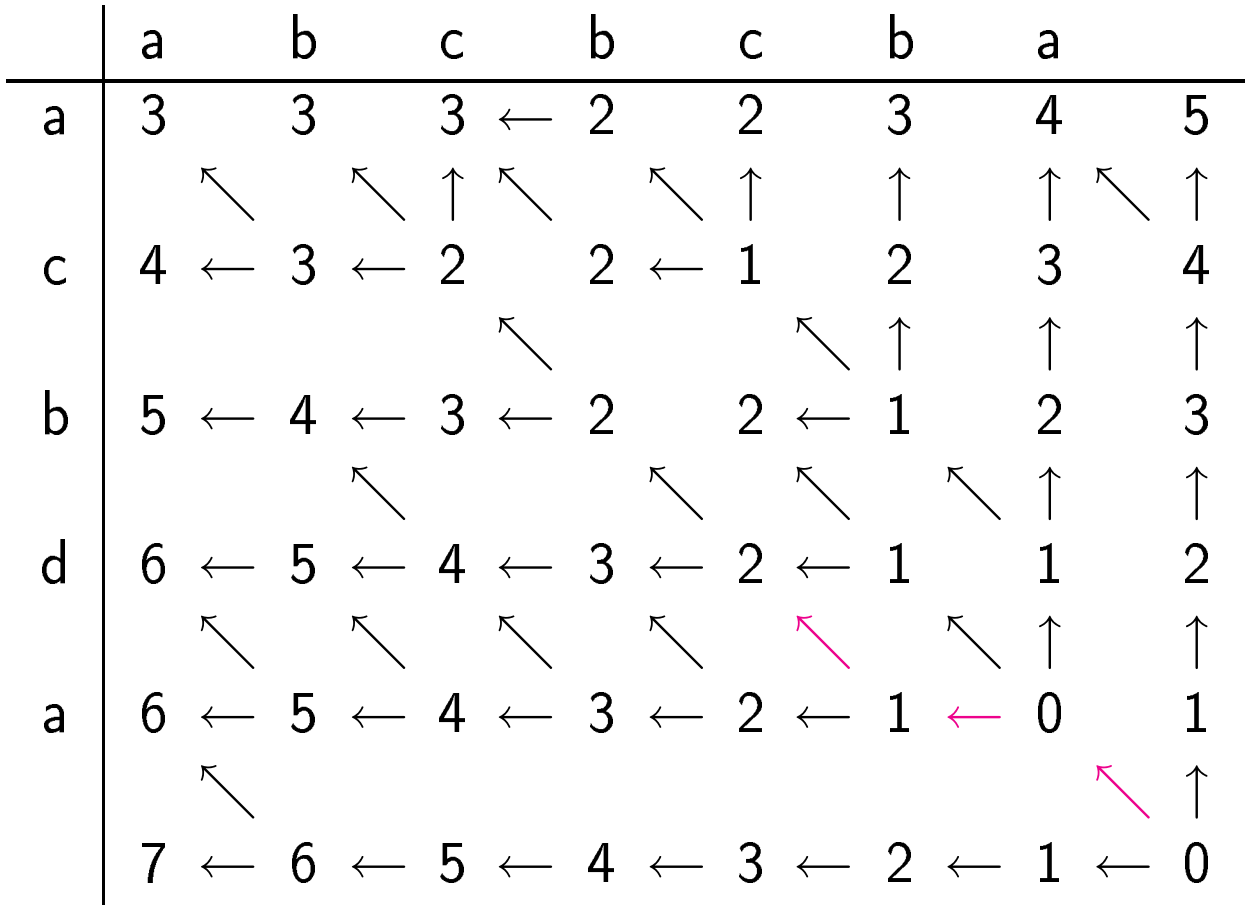
Ablesen:

a	b	c	b	c
a	–	c	b	–

a	b	c	b
a	–	c	b

Retracing (II)

Beispiel:



Ablesen:

a	b	c	b	c	b
a	–	c	b	–	d

a	b	c	b
a	–	c	b

Retracing (II)

Beispiel:

		a		b		c		b		c		b		a		
	a	3		3		3	←	2		2		3		4		5
			↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
	c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4
							↖				↖	↑		↑		↑
	b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3
					↖				↖		↖		↖	↑		↑
	d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2
			↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑
	a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1
			↖												↖	↑
		7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0

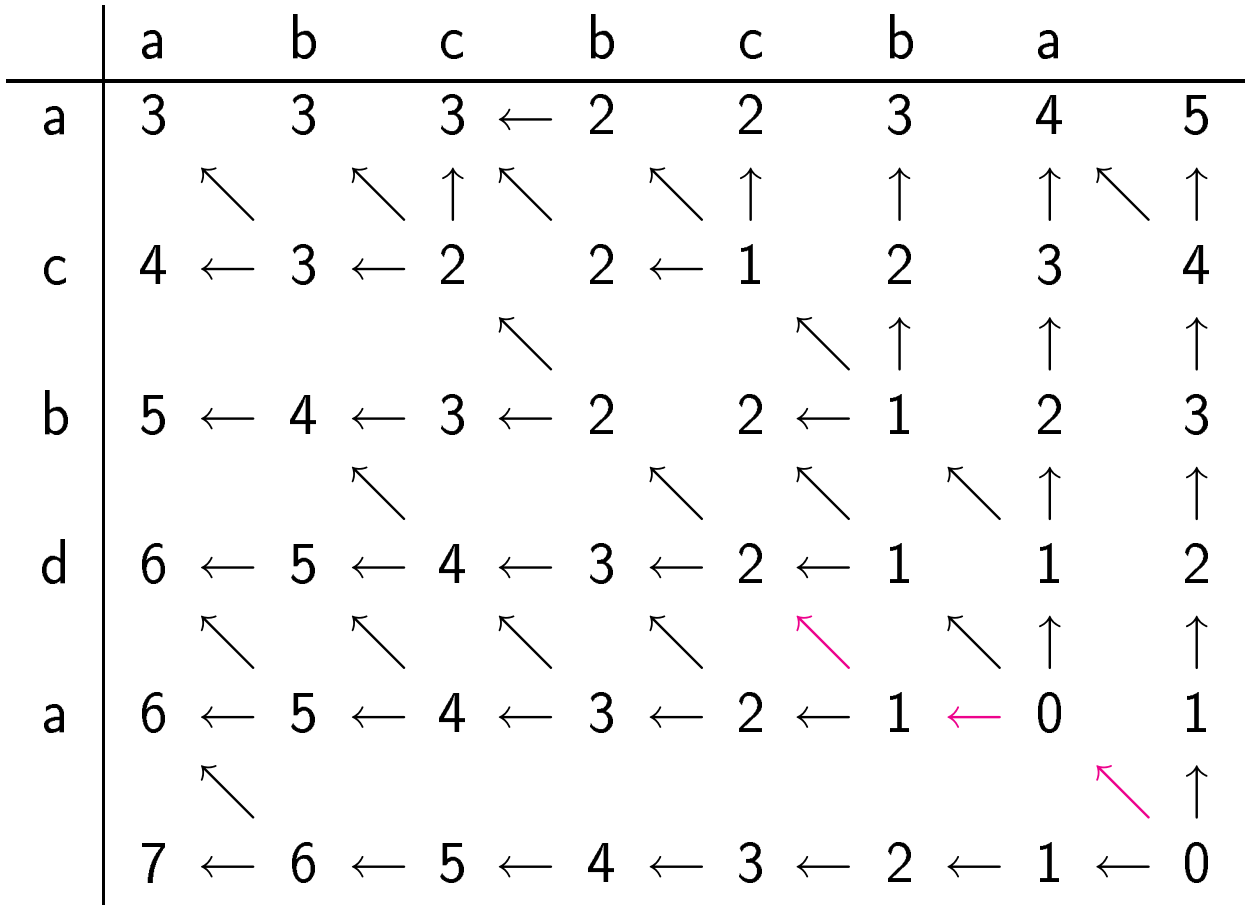
Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b
a	–	c	b

Retracing (II)

Beispiel:



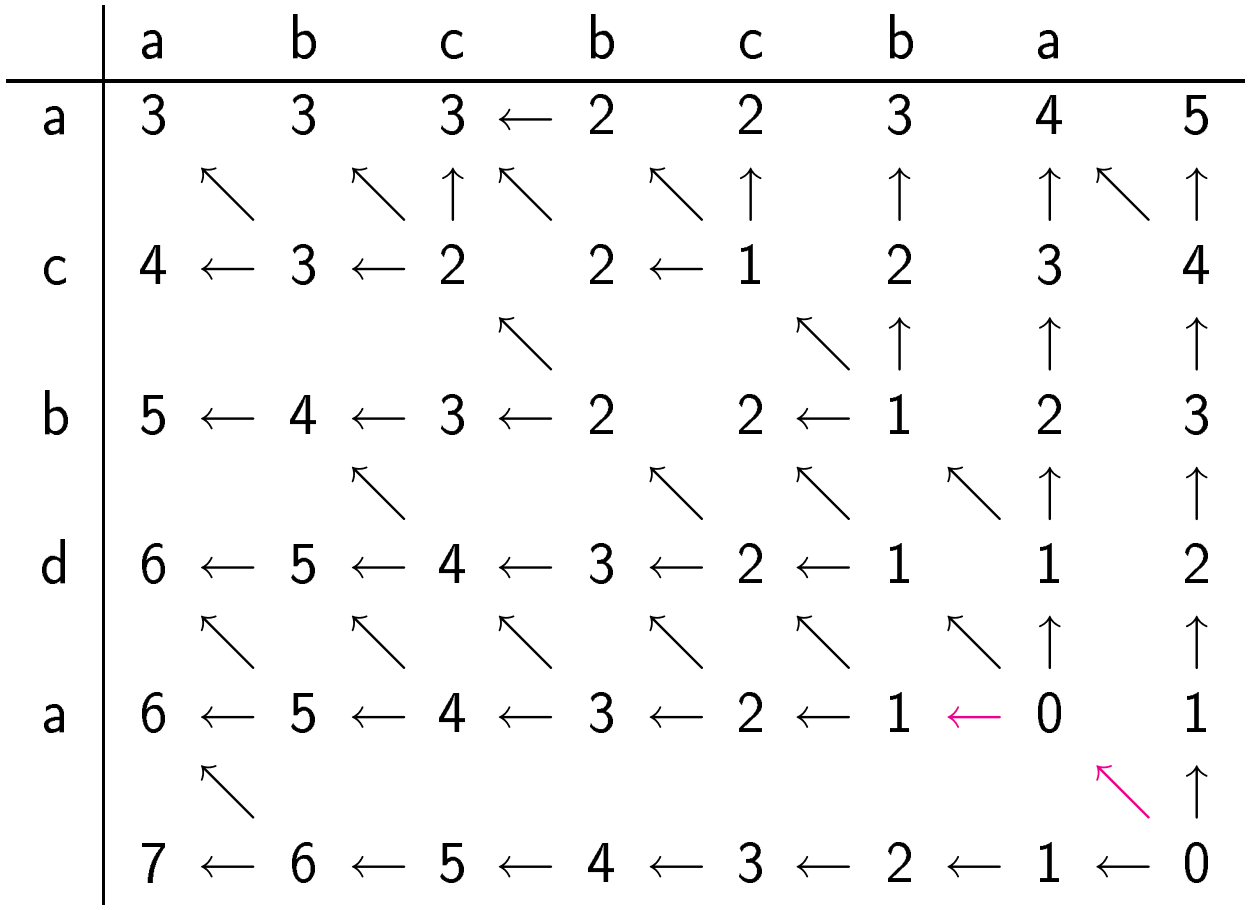
Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b
a	–	c	b

Retracing (II)

Beispiel:



Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b	c
a	–	c	b	d

Retracing (II)

Beispiel:

	a		b		c		b		c		b		a		
a	3		3		3	←	2		2		3		4		5
		↖		↖	↑	↖		↖	↑		↑		↑	↖	↑
c	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3		4
						↖				↖	↑		↑		↑
b	5	←	4	←	3	←	2		2	←	1		2		3
				↖				↖		↖		↖	↑		↑
d	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1		1		2
		↖		↖		↖		↖		↖		↖	↑		↑
a	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0		1
		↖												↖	↑
	7	←	6	←	5	←	4	←	3	←	2	←	1	←	0

Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b	c	b
a	–	c	b	d	–

Retracing (II)

Beispiel:

	a	b	c	b	c	b	a	
a	3	3	3	2	2	3	4	5
c	4	3	2	2	1	2	3	4
b	5	4	3	2	2	1	2	3
d	6	5	4	3	2	1	1	2
a	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	6	5	4	3	2	1	0

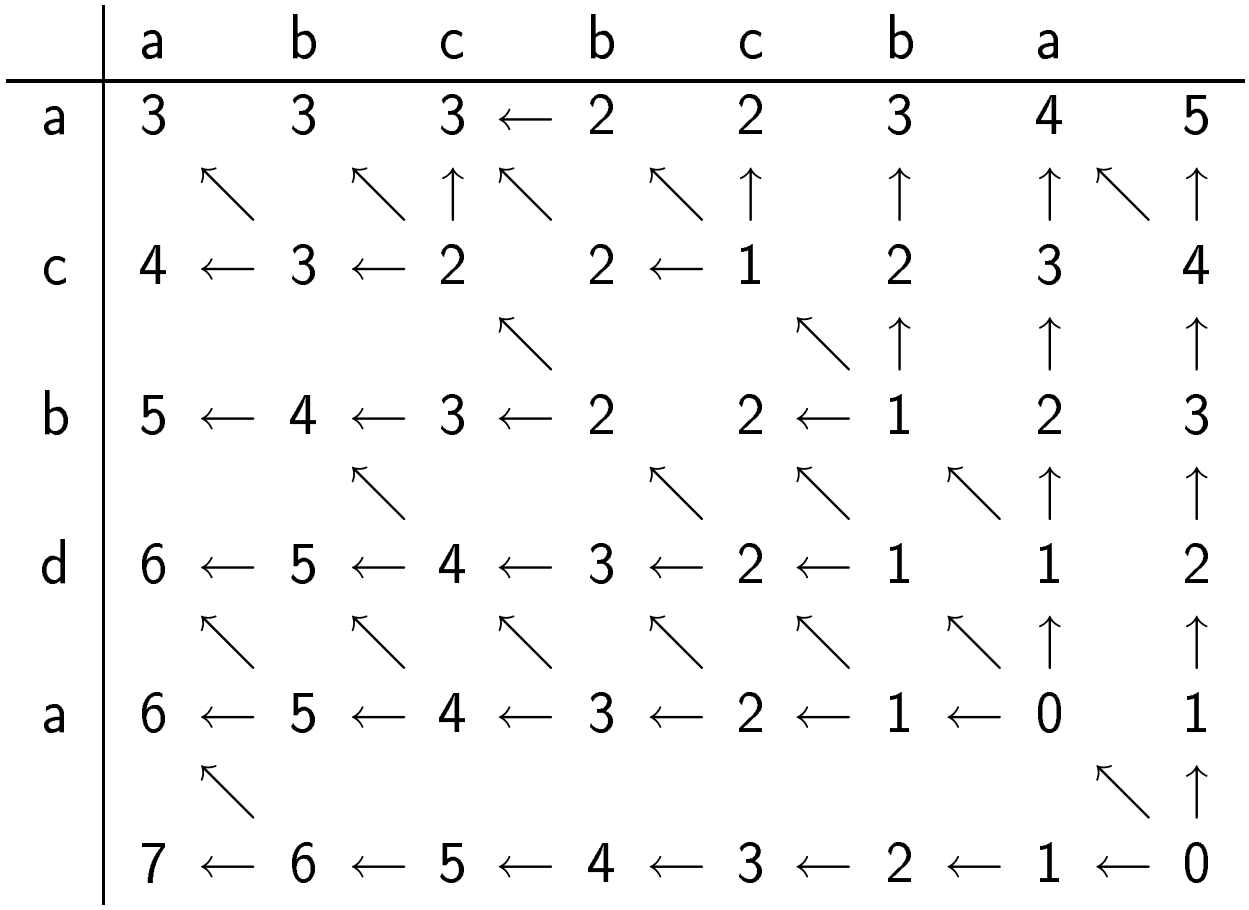
Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	d	–	a

Retracing (II)

Beispiel:



Ablesen:

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	–	d	a

a	b	c	b	c	b	a
a	–	c	b	d	–	a